## مبحث پانزدهم (حرکت خطی اجسام و مرکز جرم)

با توجه به مباحث پیشین به این نتیجه رسیدیم که برای یک ذره یا یک جسم به نام A می‌توان معادلهٔ جابجایی را به صورت زیر نوشت که در آن O نقطه‌ای مشخص و چسبیده به زمین است و$F$ها شامل نیروی وزن نیز می‌باشد.

$$\sum F = m_A D_e^2 r_{OA}$$

در اکثر مسائلی که با آن روبرو هستیم با جسمی سروکار داریم که خود از اجزای کوچکتری ساخته شده است. به اجزای تشکیل‌دهنده‌ی یک جسم ذرات آن جسم می‌گوییم. به عنوان مثال می‌توان یک اتومبیل را به دو بخش یا ذره‌ی چرخ و بدنه تقسیم نمود. حال سوالی مطرح می‌شود که آیا درست این است که بگوییم اتومبیل در تعامل با جاده است یا درست این است که بگوییم چرخ اتومبیل در تعامل با جاده است؟ به عبارت دیگر باید بگوییم جسم در تعامل با چیزی قرار گرفته است یا باید بگوییم فلان ذره از جسم در تعامل با آن چیز قرار گرفته است؟

به عنوان نمونه‌ای دیگر می‌توان پرنده‌ی در حال حرکت را درنظر گرفت. اجزای مختلف این پرنده مانند بال‌ها، سر، دم و بدن آن هر یک به نحوی خاص با هوا در تعامل هستند. یا وقتی شخصی در حال راه‌رفتن روی زمین است پاهای او در تعامل با زمین است نه کل بدن او. حال این سوال مطرح می‌شود که چگونه می‌توانیم از تعامل اجزای یک جسم به تعامل کل آن جسم برسیم؟ به عبارت دیگر با چه نگرشی می‌توانیم وقتی جسمی از ذرات مختلف با تعامل‌های مختلف تشکیل شده است از تعامل کل آن جسم سخن بگوییم؟

علاقه‌مندی ما به صحبت از کل در تمرین‌هایی که حل نمودید مشخص می‌شود. به عنوان نمونه در مثال قایق علاقه‌مندیم آب را یک جسم و قایق، قایق‌ران و پارو را جسم دیگر درنظر بگیریم. اما برای اینکه این کار را انجام دهیم چه نگاه و گویش صحیح و دقیقی باید داشته باشیم؟

همانطور که می‌دانید رابطه‌ی فوق برای تک تک ذرات یک جسم برقرار است. فرض می‌کنیم جسمی از n ذره تشکیل شده است(توجه داشته باشید که بسته به مسأله‌ی مطرح‌شده این ذرات می‌توانند انتخاب شوند).

بنابراین n رابطه‌ی برقرار به صورت زیر می‌باشند:

$$(\sum F)_k = m_k D_e^2 r_{Ok} \qquad k = 1,2,\dots,n$$

اما همانطور که مشخص است حل n معادله کاری بس دشوار است. لذا به دنبال آن هستیم که به n ذره نپرداخته و به یک نتیجه‌ی کلی برای حرکت جسم n ذره‌ای دست یابیم.

با توجه به  همان اساسی که در تعامل، مجموعِ داده و ستانده را صفر گرفتیم، که نیروهای بین ذرات برابر و در خلاف جهت یکدیگر بودند، به نظر می‌رسد با جمع کردن طرفین n معادله کمی از پیچیدگی مسأله کاسته شود. همچنین می‌توانیم نیرو را به دو دسته نیروهای داخلی و نیروهای خارجی تقسیم کنیم. به عنوان مثال بال یک پرنده هم با هوا تعامل دارد که نیروی خارجی اعمال می‌شود و هم با بدن پرنده در تعامل است که نیروی داخلی ردو بدل می‌شود. بنابراین:

$$(\sum F_{external})_k + (\sum F_{internal})_k = m_k D_e^2 r_{Ok} \qquad k = 1,2,\dots,n$$

حال دستگاه n معادله‌ای زیر را داریم:

$$\begin{cases} \left(\sum F_{external}\right)_1 + \left(\sum F_{internal}\right)_1 = m_1 D_e^2 r_{O1} \\ \left(\sum F_{external}\right)_2 + \left(\sum F_{internal}\right)_2 = m_2 D_e^2 r_{O2} \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ (\sum F_{external})_n + (\sum F_{internal})_n = m_n D_e^2 r_{On} \end{cases}$$

لذا از جمع طرفین به‌راحتی داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum F_{int}\right)_k + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum F_{ext}\right)_k = \sum_{k=1}^{n} m_k D_e^2 r_{Ok}$$

حال چون :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum F_{int}\right)_k = 0$$

بنابراین رابطه به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\left(\sum F_{ext}\right)_k = \sum_{k=1}^{n} m_k D_e^2 r_{Ok}}$$

مطابق رابطه‌ی بالا ، زمانی که خواستیم جابجایی  جسمی را در تعامل، بررسی نماییم و قانع باشیم که به بررسی فقط یک نقطه از جسم بسنده کنیم، کافی است به نیروهایی که از بیرون به این جسم وارد می‌شود توجه کنیم. به عنوان مثال در حرکت پرنده کافی است تعامل بین بال و هوا را درنظر بگیریم و تعامل بال با بدنه را لحاظ نکنیم.

به این ترتیب اگر چه در این گویش یک سری از اطلاعات از دست می‌رود اما کار ساده‌تر شده و می‌توان با استفاده از آن در مورد سرنوشت کلیِ جسم سخنی گفت. اما همچنان طرف راست رابطه دشوار است.

برای ساده نمودن طرف راست فرض می‌کنیم به جای اینکه از تمام ذرات یک جسم سخن بگوییم یک نقطه از آن به نام  B را به عنوان نماینده‌ی کل جسم درنظر بگیریم(B با k تغییر نمی‌کند). به عنوان نمونه در حرکت یک اتومبیل نمی‌گوییم شتاب چرخش چه مقداری است بلکه به کلیت موضوع نگاه می‌کنیم.

طبق رابطه‌ی برداری زیر

$$r_{Ok} = r_{OB} + r_{Bk}$$

از جمع n رابطه داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}(\sum F_{external})_k = \sum_{k=1}^{n} m_k D_e^2(r_{OB} + r_{Bk}) = \sum_{k=1}^{n} m_k D_e^2(r_{OB}) + \sum_{k=1}^{n} m_k D_e^2(r_{Bk})$$
$$= M_{total} D_e^2(r_{OB}) + \sum_{k=1}^{n} m_k D_e^2(r_{Bk})$$

از آن‌جایی که عملگر مشتق‌گیر مانند عملگر جمع‌کننده خطی است می‌تواند با آن جابجا شود.

$$\sum_{k=1}^{n}(\sum F_{external})_k = M_{total} D_e^2(r_{OB}) + D_e^2\{\sum_{k=1}^{n} m_k r_{Bk}\}$$

اگر عبارت داخل آکولاد در رابطه‌ی فوق صفر شود رابطه بسیار ساده می‌شود. آن Bای که عبارت داخل آکولاد را صفر می‌کند مرکز جرم نامیده و آن را با $C_m$ نشان می‌دهیم.

مرکز جرم همیشه وجود دارد و همیشه یکتاست. مرکز جرم حتماً روی جسم قرار ندارد. به این ترتیب داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}(\sum F_{external})_k = M_{total}D_e^2(r_{OC_m})$$

به این ترتیب با استفاده از رابطه‌ی فوق راجع به حرکت مرکز جرم می‌توانیم اظهارنظر کنیم.

**مثال مرکز جرم)** فرض کنید جسم ۱ به جرم ۱ کیلوگرم در فاصله‌ی ۱ متری از جسم ۲ به جرم ۲ کیلوگرم قرار گرفته است. مرکز جرم دو جسم در کجا قرار می‌گیرد.

*پاسخ:* دستگاهی روی دو جسم بنا می‌کنیم که جهت مثبت راستای اول آن از جسم ۱ به سمت جسم ۲ باشد. نقطه‌ی B را نقطه‌ی مرکز جرم در نظر می‌گیریم که بین دو جسم قرار گرفته است. بردار واصل از جسم ۱ به B را $r_{1B}$ و بردار واصل از B به جسم ۲ را $r_{B2}$در نظر می گیریم. بنابراین:

$$r_{1B} + r_{B2} = 1 \rightarrow r_{B2} = 1 - r_{1B}$$

$$m_1 r_{1B} + m_2 r_{2B} = 0 \rightarrow m_1 r_{1B} - m_2 r_{B2} = 0 \rightarrow m_1 r_{1B} - m_2(1 - r_{1B})$$
$$= 0 \rightarrow m_1 r_{1B} - m_2 + m_2 r_{1B} = 0 \rightarrow r_{1B} - 2 + 2r_{1B} = 0 \rightarrow r_{1B} = \frac{2}{3} \ , r_{B2} = \frac{1}{3}$$

جسم صلب جسمی است که اگر دستگاهی بر آن بنا کنیم فاصله‌ی تک تک ذرات آن با یکدیگر با زمان تغییری نمی‌کند. بنابراین جای مرکز جرم در یک جسم صلب ثابت است. بدن ما یک جسم صلب نیست چرا که با حرکت اجزای آن مانند دست و پا، جای اجزای بدن نسبت به یکدیگر و در نتیجه جای مرکز جرم بدن تغییر می‌کند.

اگر جسمی غیر صلب باشد، باز هم رابطه‌ی نهایی بدست آمده صحیح می‌باشد اما با آرگومان زمانی. به عبارت دیگر رابطه در هر لحظه درست است. حتی اگر جرم کل جسمی در هر لحظه در حال تغییر باشد، باز هم رابطه برقرار است، البته برای جرم کل و مرکز جرم با آرگومان زمان یا به عبارت دیگر باید جرم کل و مرکز جرم را در هر لحظه بدست آورد و در رابطه وارد نمود.

**تکلیف)** معادله را برای نقطه‌ای دیگر به غیر از مرکز جرم(بر حسب $r_{Cm\,B}$) بدست آورید. به عبارت دیگر B را غیر $C_m$در نظر بگیرید. *( در پاسخ عبارتی به رابطه‌ی نهایی اضافه می‌شود.)*